★
Exercice 1 — Voir correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I et d'une matrice B vérifiant $B^2 = 0$, puis en déduire une expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

★
Exercice 2 — Voir correction

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer J^n en fonction de n.
2) Dans chaque cas, exprimer la matrice A en fonction de I_3 et J puis en déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

★
Exercice 3 — Voir correction

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Exprimer A^n en fonction de n et a.

★
Exercice 4 — Voir correction

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$.
2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

★
Exercice 5 — Voir correction

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse par un calcul simple.

★ ★
Exercice 6 — Voir correction

On considère les suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + 6z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
4) Montrer que $PAP^{-1} = D$ avec D une matrice diagonale.
5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$
6) En déduire une expression de A^n en fonction de n, puis une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

⋆

Exercice 7 — Voir correction

Déterminer le rang des matrices suivantes. Préciser lesquelles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -6 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Dans chaque cas déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles A est inversible

1) $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & 1-x \\ x & 2 & 1 \end{pmatrix}$

⋆

Exercice 9 — Voir correction

1) Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
   On pourra utiliser la caractérisation suivante : $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

⋆

Exercice 10 — Voir correction

Soit A une matrice telle que $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$. Que peut-on dire de A ?

⋆

Exercice 11 — Voir correction

On dit qu'une matrice carrée A est **nilpotente** s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Soit A une matrice nilpotente non nulle et p le plus petit entier tel que $A^p = 0$.

1) Justifier que A n'est pas inversible.
2) Calculer $(A - I)(I + A + \cdots + A^{p-1})$. Que peut-on en déduire sur $A - I$?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12 — Voir correction

On dit qu'une matrice carrée est stochastique si ses coefficients sont des réels positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, autrement dit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

Notons $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille n et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de taille n ne contenant que des 1.

1) Soit $A, B \in \mathcal{E}_n$. Montrer que $AB \in \mathcal{E}_n$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Montrer que $A \in \mathcal{E}_n \iff AU = U$
3) Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Montrer que la matrice $A - I$ n'est pas inversible.
4) Soit $A \in \mathcal{E}_n$ telle que A est inversible. Montrer que $A^{-1}U = U$. Dans quel cas a-t-on $A^{-1} \in \mathcal{E}_n$?

⋆

Exercice 13 — Voir correction

Soit A une matrice carrée de taille n. Montrer l'équivalence suivante :

$$A = I_n \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X$$

⋆

Exercice 14 — **Voir correction**

1) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
2) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
3) Montrer qu'il n'existe aucun couple de matrices $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB - BA = I$.

⋆ ⋆

Exercice 15 — **Voir correction**

Soient $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$ et soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $A(BC) = (AB)C$.

⋆ ⋆

Exercice 16 — **Voir correction**

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- symétrique si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = a_{j,i}$
- antisymétrique si $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1) Montrer qu'une matrice A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$, et antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.
2) Soient S et T deux matrices symétriques. Montrer que ST est symétrique si et seulement si $ST = TS$.
3) Soient M et N deux matrices antisymétriques, montrer que MN est antisymétrique si et seulement si $MN = -NM$.

⋆

Exercice 17 — **Voir correction**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, $AX = BX$. Montrer que $A = B$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18 — **Voir correction**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 10 : Notons $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de A.
Posons $B = A^tA$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $B_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}({}^tA)_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{j,k}$
On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^tA) &= \mathrm{tr}(B) \\
&= \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2
\end{aligned}$$

Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul. Ainsi, si $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$ on a $\forall i,k \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,k} = 0$, autrement dit $A = 0$.

Correction de l'exercice 12 :

1) A et B sont à coefficients positif, donc toute somme de produits de coefficients de A et de B est positif, donc AB est à coefficients positifs.
Notons $(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients de AB. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ donc

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n c_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} \\
&\sum_{k=1}^n a_{i,k} \sum_{j=1}^n b_{k,j} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times 1 \\
&= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique}
\end{aligned}$$

ainsi $AB \in \mathcal{E}_n$.

2) A est à coefficients positifs donc $A \in \mathcal{E}_n \iff \forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
Le i-ème coefficient du vecteur colonne AU est $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$, donc $AU = U \iff \forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AU)_i = 1 \iff AU = U$.
Finalement, $A \in \mathcal{E}_n \iff AU = U$.
3) $AU = U$ donc $(A - I)U = 0$ avec $U \neq 0$ donc $A - I$ n'est pas inversible.
4) $AU = U$ donc en multipliant par A^{-1} de chaque côté de l'égalité on obtient $U = A^{-1}U$. On a donc $A^{-1} \in \mathcal{E}_n$ à condition que les coefficients de A^{-1} soient positifs, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Correction de l'exercice 14 :

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
D'une part :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i}$$

D'autre part :

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i}b_{k,i} = \sum_{i'=1}^n \sum_{k'=1}^n a_{i',k'}b_{k',i'}$$

en renommant les indices en $i' = k$ et $k' = i$. Ainsi, $\mathrm{tr}(AB)\mathrm{tr}(BA)$
2) $\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (A+B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + b_{i,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

3) Supposons qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = I$.
Alors $\operatorname{tr}(AB-BA) = \operatorname{tr}(I)$. Or $\operatorname{tr}(I) = n$ et $\operatorname{tr}(AB-BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$ d'après les deux questions précédentes.
Pour $n \geq 1$ il n'existe donc aucune matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I$.

Correction de l'exercice 15 : Notons $D = BC = (d_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $E = A(BC) = AD = (e_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}$. Alors

$$\forall (k,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\ d_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{p} b_{k,\ell} c_{\ell,j}$$

donc

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\ e_{i,j} &= \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} d_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \sum_{\ell=1}^{p} b_{k,\ell} c_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell} c_{\ell,j}\end{aligned}$$

Notons maintenant $F = AB = (f_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $G = (AB)C = FC = (g_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}}$. Alors

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\ f_{i,k} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i,\ell} b_{\ell,k}$$

donc

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\ g_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} f_{i,k} c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{m} a_{i,\ell} b_{\ell,k} \right) c_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{m} a_{i,\ell} b_{\ell,k} c_{k,j}\end{aligned}$$

en posant $k' = \ell$ et $\ell' = k$ on obtient

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]\ g_{i,j} &= \sum_{\ell'=1}^{p} \sum_{k'=1}^{m} a_{i,k'} b_{k',\ell'} c_{\ell',j} \\ &= \sum_{k'=1}^{m} \sum_{\ell'=1}^{p} a_{i,k'} b_{k',\ell'} c_{\ell',j} \\ &= e_{i,j}\end{aligned}$$

donc $G = E$, c'est à dire $A(BC) = (AB)C$.

Correction de l'exercice 16 :

1) Notons $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$. Alors

$$\begin{aligned} ST \text{ est symétrique} &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (ST)_{i,j} = (ST)_{j,i} \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n} s_{i,k} t_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} t_{k,i} \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \sum_{k=1}^{n} s_{k,i} t_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} t_{k,i} \qquad \text{car } S \text{ et } T \text{ sont symétriques} \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (TS)_{j,i} = (ST)_{j,i} \\ &\iff ST = TS \end{aligned}$$

2) De même, notons $M=(m_{i,j})$ et $N=(n_{i,j})$. Alors

$$\begin{aligned}
MN \text{ est antisymétrique} &\iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad (MN)_{i,j}=-(MN)_{j,i}\\
&\iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}=-\sum_{k=1}^{n} m_{j,k}n_{k,i}\\
&\iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad \sum_{k=1}^{n} (-m_{k,i})(-n_{j,k})=-\sum_{k=1}^{n} m_{j,k}n_{k,i}\\
&\iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad \sum_{k=1}^{n} n_{j,k}m_{k,i}=\sum_{k=1}^{n} m_{j,k}n_{k,i}\\
&\iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad (NM)_{j,i}=-(MN)_{j,i}\\
&\iff NM=-MN
\end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que A est symétrique $\iff {}^tA=A$ et A est antisymétrique $\iff {}^tA=-A$. Ainsi pour la première question :

$$\begin{aligned}
ST \text{ est symétrique} &\iff {}^t(ST)=ST\\
&\iff {}^tT{}^tS=ST\\
&\iff TS=ST
\end{aligned}$$

et pour la deuxième question :

$$\begin{aligned}
MN \text{ est antisymétrique} &\iff {}^t(MN)=-MN\\
&\iff {}^tN{}^tM=-MN\\
&\iff (-N)(-M)=-MN\\
&\iff NM=-MN
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 17 : Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, considérons la matrice colonne X_i ne contenant que des 0 sauf un 1 sur la i-ème ligne. Alors AX_i est la i ème colonne de A et BX_i est la i-ème colonne de B. Puisque $AX_i=BX_i$, les i-ème colonnes de A et B sont égales, et ceci est vrai pour tout $i\in[\![1,m]\!]$ donc finalement $A=B$.

Correction de l'exercice 18 :
Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice ne contenant que des 0 sauf un 1 en i-ème ligne et j-ème colonne. Alors $AE_{i,j}$ est la matrice dont la j-ème colonne est la i-ème colonne de A et toutes les autres colonnes sont nulles, donc $\mathrm{tr}(AE_{i,j})=a_{j,i}$ et $\mathrm{tr}(BE_{i,j})=b_{j,i}$. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on a donc $a_{j,i}=b_{j,i}$ donc $A=B$.